Для семинара №2,3.

I. Методы введения топологий

Пусть (X,τ) – топологическое пространство, $\mathscr{B} \subseteq \tau$ – база топологического пространства, $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ – система окрестностей топологического пространства. Тогда

1. всякая база $\mathscr{B}$ обладает следующими свойствами:

(B1) Для любых $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ и любой точки $x \in U_1 \cap U_2$ существует элемент $U \in \mathscr{B}$ такой, что $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$.

(B2) Для любого $x \in X$ существует элемент $U \in \mathscr{B}$ такой, что $x \in U$.

2. всякая система окрестностей $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ обладает следующими свойствами:

(BP1) Для всякого $x \in X$ имеем $\mathscr{B}(x) \neq \varnothing$ и для всякого $U \in \mathscr{B}(x)$ имеем $x \in U$.

(BP2) Если $x \in U \in \mathscr{B}(y)$, то существует такое $V \in \mathscr{B}(x)$, что $V \subseteq U$.

(BP3) Для любых $U_1, U_2 \in \mathscr{B}(x)$ существует такое $U \in \mathscr{B}(x)$, что $U \subseteq U_1 \cap U_2$.

Теорема 1.*Пусть даны множество X и семейство $\mathscr{B}$ его подмножеств, удовлетворяющее условиям (B1)–(B2). Пусть τ – семейство всех подмножеств множества X, являющихся объединениями подсемейств семейства $\mathscr{B}$, т.е. $U \in \tau$ ТиТТК $U = \bigcup \mathscr{B}_0$, где $\mathscr{B}_0$ – подсемейство семейства $\mathscr{B}$. Тогда семейство τ является топологией на множестве X, а семейство $\mathscr{B}$ является базой топологического пространсва (X,τ).*

Теорема 2.*Пусть даны множество X и совокупность $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ семейств его подмножеств, обладающих свойствами (BP1)–(BP3). Пусть τ – семейство всех подмножеств X, являющихся объединениями подсемейств семейства $\bigcup_{x\in X} \mathscr{B}(X)$. Тогда семейство τ является топологией на множестве X, а совокупность $\{\mathscr{B}(x)\}_{x\in X}$ является системой окрестностей топологического пространства (X,τ).*

Примеры:

X – произвольное множество, $\tau_d = 2^X$. (дискретная топология)

X – произвольное множество, $\tau_a = \{\emptyset, X\}$. (антидискретная топология)

X – бесконечное множество, $\tau = \{A \subseteq X : \text{множество } X \setminus A \text{ конечно}\}$. (топология Зарисского)

$X = \mathbb{R}$, $\mathscr{B}$ – семейство всех интервалов (q,r), где $q,r \in \mathbb{R}$, $q < r$ и q,r – рациональные числа. (евклидова топология)

$X = \mathbb{R}$, $\mathscr{B}$ – семейство всех интервалов $[x,r)$, где $x,r \in \mathbb{R}$, $x < r$ и r – рациональные числа. (прямая Зоргенфрея)

Плоскость Немыцкого.

Счётное топологическое пространство без первой аксиомы счётности.

II. Задачи

1. Для любого $A \subseteq X$ следующие условия эквивалентны:

   (i) точка x принадлежит $\mathrm{Cl}(A)$;

   (ii) для всякой базы $\mathscr{B}(x)$ в точке x и любого $U \in \mathscr{B}(x)$ имеем $U \cap A \neq \emptyset$;

   (iii) существует база $\mathscr{B}(x)$ в точке x такая, что $U \cap A \neq \emptyset$ для каждого $U \in \mathscr{B}(x)$.

2. Если A всюду плотно в X, то для любого открытого $U \subseteq X$

$$\mathrm{Cl}(U) = \mathrm{Cl}(U \cap A).$$

3. Пусть топологическое пространство X обладает первой аксиомой счетности и $M \subseteq X$. Доказать следующую равносильность:

$$x \in \mathrm{Cl}(M) \Leftrightarrow \exists \{x_n \in M : n = 1, 2, \ldots\} \to x.$$

4. Доказать, что если пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, то оно удовлетворяет и первой аксиоме счетности. Верна ли обратная импликация?

5. Каждое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счётности, сепарабельно.

6. Привести пример сепарабельного пространства и его несепарабельного подпространства.

7. Плоскость Немыцкого не обладает счётной базой и не является финально компактным пространством.

8. Пусть топологическое пространство X обладает счетной базой. Доказать, что пространство X является финально компактным.

9. Прямая Зоргенфрея не обладает счётной базой, но является финально компактным пространством.

10. Пространство компактно ТиТТК оно финально компактно и счетно компактно.

11. Непрерывный образ (счетно) компактного пространства (счетно) компактен.

12. Каждое счетно компактное подпространство вещественной прямой компактно.

13. Множество всех счётных ординалов счётно компактно.